Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Probabilités

Exercice 8 type devoir

Exercice :

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement n^p et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux événements suivants :

A : " On obtient des boules des deux couleurs " ;

B : " On obtient au plus une blanche ".

1°) a) Calculer la probabilité de l'événement : " Toutes les boules tirées sont de même couleur ".

b) Calculer la probabilité de l'événement : " On obtient exactement une boule blanche ".

c) En déduire que les probabilités $p(A \cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :

$$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n} \quad ; \quad p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad ; \quad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

2°) Montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si, et seulement si, $2^{n-1} = n + 1$.

3°) Soit (u_n) la suite définie, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à deux, par $u_n = 2^{n-1} - (n-1)$.

Calculer u_2, u_3, u_4. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

1) a) C : « toutes les boules tirées sont de même couleur »

$C = \{(N, \ldots, N) \text{ ou } (B, \ldots, B)\}$ (n fois) (n fois)

$$p(C) = \left(\frac{5}{10}\right)^n + \left(\frac{5}{10}\right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

D : « on obtient exactement une boule blanche »

$D = \{(B, N, \ldots, N)\}$ (avec ordre)

$$p(D) = C_n^1 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c) On remarque que $A \cap B = D$

Donc $p(A \cap B) = p(D) = \frac{n}{2^n}$

$\bar{A}$: « toutes les boules tirées sont de même couleur »

Donc $p(\bar{A}) = p(C)$

Ainsi $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

$B = \{(B, \underbrace{N, \ldots, N}_{(n-1) \text{ fois}}) \text{ ou } (\underbrace{N, N \ldots, N}_{n \text{ fois}})\}$

$$p(B) = n \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2^n}$$

2) $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times \frac{n+1}{2^n}$

$\Leftrightarrow n = n+1 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$

$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2^{n-1}} = 1$

$\Leftrightarrow \boxed{n+1 = 2^{n-1}}$

3) $\boxed{u_2} = 2 - (2+1) = \boxed{-1}$

$\boxed{u_3} = 2^2 - (3+1) = 4 - 4 = \boxed{0}$

$\boxed{u_4} = 2^3 - (4+1) = \boxed{3}$

4) $\forall n \geq 2$; $u_{n+1} - u_n = 2^n - (n+2) - 2^{n-1} + (n+1)$

$= 2^n - 2^{n-1} - 1$

$= 2^{n-1}(2-1) - 1$

$= 2^{n-1} - 1 > 0$ car $n \geq 2$

Donc (u_n) est strictement croissante.